746. D'Amore B. (2011). La didáctica del infinito matemático. Sunto della Conferenza generale tenuta il 9 settembre 2011 al XXIV Coloquio Distrital de Matematicas y Estadistica, promosso dalle Universdità Distrital, Nacional e Pedagogica de Bogotà. In: AA. VV. (2011). *Memorias* del XXIV Coloquio Distrital de Matematicas y Estadistica, Bogotà, 8-10 settembre 2011. CD. ISBN: 978-958-57050-0-5. Pagg. 21-29.

La didáctica del infinito matemático

Bruno D'Amore
Mescud – Universidad Distrital Francisco José de Caldas - Bogotà

***Abstract*:** In this paper, we study the limits of understanding and lack of acceptance shown by students from the upper-secondary school related to actual mathematical infinity; in particular, we explore their answers with respect to a celebrated theorem of Georg Cantor. Moreover, we try to analyze the motives of this widespread non-acceptance which surfaces in diverse fashions.

Palabras clave: didáctica del infinito matemático, obstáculos epistemológicos y didácticos, infinito actual y potencial.

1. Prefacio

Este texto resume una extensa investigación realizada con estudiantes y maestros sobre la construcción del conocimiento en relación con el infinito matemático; el trabajo lleva a este punto más de 20 años. El título general de la línea de investigación es: *Lo veo, pero no lo creo*.
La bibliografía siguiente enumera algunos textos producidos en esta dirección; después de 5-6 años de investigación, en el julio 1996 el ICME dio a mi mismo la responsabilidad de *chief organizer* de un grupo temático, el XIV: *El infinito*, en el VIII ICME de Sevilla, con Raymond Duval como colaborador.
Dada la brevedad del tiempo y del espacio disponible, en esta ocasión voy a presentar sólo unos pocos puntos de la investigación, que sigue aún.
Por lo general, las investigaciones al interno del NRD de Italia, activo en el Departamento de Matemática de la Universidad de Bologna (NRD: www.dm.unibo.it/rsddm) se organizan según un esquema clásico y fijo:
1. referencias historias y epistemológicas
2. descripción del cuadro teórico de referencia
3. descripción de los problemas de investigación
4. hipótesis de la investigación
5. metodología
6. resultados de la investigación
7. discusión de los resultados
8. verificación de las hipótesis
9. respuestas a las preguntas formuladas en 4
10. referencias bibliográficas.
En esta ocasión me limitaré sólo a algunos de estos puntos.

2. Origen histórico del título de la investigación

Cuando nos acercamos a la historia de la matemática, una de las cuestiones que mas sorprende, es el contenido de una célebre y extraordinaria carta de Georg Cantor (1845-1918) a Richard Dedekind (1831-1916), enviada desde Halle el 29 de junio de 1877. Dado que Dedekind se retrasaba (!) en dar respuesta a un problema que le había propuesto el 25 de junio, Cantor, después de sólo 4 días, y

pidiendo disculpas por el proprio *celo,* propone con fuerza, en la carta del 29 de junio, una nueva interrogación, declarando tener *necesidad* de recibir el parecer de Dedekind.
Casi al inicio de esta nueva carta (en alemán), Cantor escribe (en francés) la famosa frase:
«*Mientras que usted no lo apruebe, yo no puedo más que decir: lo veo pero no lo creo*».[1]
Espontáneamente surge la siguiente pregunta, ¿cuál sería el argumento sobre el que Cantor solicitaba, decidido, una rápida respuesta de Dedekind? Nos lo dice el mismo Cantor en su carta del 25 de junio:
«*Una variedad continua de p dimensiones, con p> 1, ¿se puede poner en relación unívoca con una variedad continua de una dimensión, de manera tal que a un punto de una corresponda uno y sólo un punto de la otra*?».
Debemos decir inmediatamente que, en aquella época, se entendía por "relación univoca" lo que hoy llamamos "correspondencia biunívoca". Para favorecer a un eventual lector no experto en matemática, nos podemos concretar al siguiente caso, particular, pero igualmente significativo:
¿es posible hallar una correspondencia biunívoca entre los puntos de un cuadrado[2] y los puntos de un segmento[3]?.
Se puede intuir la importancia de la pregunta a partir del siguiente comentario del mismo Cantor:
«*La mayor parte de aquéllos a los que les he puesto esta pregunta se han sorprendido mucho del hecho mismo de que yo la planteara, ya que es evidente que, para la determinación de un punto sobre una extensión de p dimensiones, se necesitan siempre p coordenadas independientes*».
Después, Cantor confesó que había intentado demostrar este hecho, suponiendo que era verdadero, pero sólo porque ya no estaba satisfecho de la supuesta y tan difundida *evidencia*! Confiesa por lo tanto haber formado parte *siempre* de aquéllos que no ponían en duda tal hecho; *siempre,* hasta que demostró que las cosas no eran así...
La demostración hallada por Cantor es de una simplicidad genial; para verla, basta consultar un buen libro de texto de Análisis de nivel universitario, por ejemplo Bourbaki (1970), pagg. 47-49. Nosotros aquí nos inspiramos en una célebre vulgarización de la demostración de Cantor que se halla en Courant y Robbins (1941) relativa sólo al ejemplo visto arriba, propuesto a nuestro hipotético lector no matemático.[4]

Pongamos el cuadrado en un sistema de ejes cartesianos ortogonales de origen O, de manera tal que dos lados consecutivos se "apoyen" sobre los ejes (obviamente uno de los vértices coincide entonces con el origen). Considerando el lado del cuadrado como unidad de medida, se tiene inmediatamente que cada punto P interno a la superficie cuadrada tiene coordenadas reales x_P y y_P del tipo $0 < x_P < 1$, $0 < y_P < 1$, por lo tanto, explícitamente: $x_P = 0.a_1a_2...a_n...$, y $y_P = 0.b_1b_2...b_n...$. A *cada pareja ordenada de números reales* (x_P, y_P) hacemos corresponder *el número real* $x_{P'}$ definido de la siguiente manera: $x_{P'} = 0.a_1b_1a_2b_2...a_nb_n...$, obtenido anteponiendo 0 y el punto decimal, y alternando después las cifras decimales singulares de cada coordenada. Se puede fácilmente constatar que $0 < x_{P'} < 1$ y, como tal, $x_{P'}$ se define de manera univoca a partir de x_P y y_P; como $x_{P'}$ se puede considerar como abscisa de un punto P' en el eje x [P'($x_{P'}$,0)], se puede pensar, por lo tanto P', como *el* correspondiente de P en la correspondencia definida.
Viceversa: se puede partir de P' y de su abscisa y, con el método inverso de distribución de las cifras, llegar unívocamente a P.
Por lo tanto, hemos probado este teorema de Cantor, al menos en el caso en el que la dimensión *p* de la variedad vale 2: a los puntos internos del cuadrado unitario corresponden de manera biunívoca los puntos internos del segmento unitario.

[1] Sobre este punto véase Arrigo y D'Amore (1993) y Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011). Para conocer los textos completos de las cartas intercambiadas entre los dos formidables matemáticos alemanes, se puede ver (Noether, Cavaillès, 1937) y (Cavaillés, 1962).
[2] Por "cuadrado" entendemos de ahora en adelante una superficie plana con forma cuadrada *abierta,* es decir sin borde.
[3] De ahora en adelante, hablaremos de segmento *abierto*, es decir sin extremos.
[4] En realidad, en lo que sigue de nuestro trabajo, es sólo a este ejemplo al que haremos referencia.

Dado que esta demostración se basa en la escritura decimal de los números, es obvio que se debe dar por descontado una *unicidad* de tal escritura como, por otra parte, objetó el mismo Dedekind a Cantor en una carta posterior (no obstante aceptando la demostración y admitiendo que su objeción no la descalificaba en lo más mínimo). Se trata por lo tanto de eliminar por convención, antes del enunciado del teorema, la única ambigüedad posible, que se halla sólo en el caso en el que aparece un 9 periódico en la expansión decimal. Por ejemplo, es bien conocido que $0.35\overline{9} = 0.36$: basta entonces *prohibir* las escrituras del primer tipo y, en el momento en que aparezca, se sustituye con escrituras del segundo tipo.[5]
Nuestra investigación tiene motivaciones puramente didácticas y los párrafos precedentes tienen sólo el objetivo de situarla en el ámbito histórico.
Quisimos recordar lo anterior, sólo para justificar nuestro título: «Lo veo, pero no lo creo», la célebre frase de Cantor, que vuelve tan humana y fatigosa toda la historia de esta demostración; para nosotros será emblemática de aquello que podría decir también un joven estudiante de la escuela secundaria superior que tuviera que ver con la demostración tratada por Courant y Robbins (1941), e ilustrada por nosotros.
Pero todo esto nos lleva también a poner en evidencia, aunque sea brevemente, los obstáculos que se han tenido en el desarrollo histórico de este difícil y controvertido argumento, hasta la demostración de Cantor que, por cuanto genial y simple, no fue acogida de manera inmediata. Aunque ya no lo diremos mas de manera explícita, es obvio que cuando hablemos de obstáculos epistemológicos al respecto, la misma historia rápidamente delineada aquí debe considerarse como un apoyo poderoso a su evidencia.

3. Cuadro teórico de referencia

En ocasión del VIII ICME (Sevilla 1996), redacté una bibliografía de más de 300 títulos, con la contribución de muchos investigadores de todo el mundo; tal bibliografía se escribió en italiano, español e inglés y se puso a consideración (precisamente en Sevilla) de los participantes en el GT XIV y redacté también un panorama razonado de tales investigaciones (D'Amore, 1996).
Partiendo de estos antecedentes, delineamos brevemente el cuadro teórico de referencia, en el que nos queremos insertar.

3.1. Entre las tantas investigaciones presentes sobre el panorama mundial, muchas se dedican a la falta de aceptación, por parte del estudiante, de las diversas cardinalidades transfinitas [entre los muchos ejemplos, véanse los trabajos clásicos de Tsamir y Tirosh (1994), de Waldegg (1993), de Fischbein, Jehiam y Cohen (1994,1995), para tener una primera idea]. Normalmente, para los estudiantes, la cardinalidad de Z es, en un primer momento, superior a la de N (hay quien incluso dice que es el *doble*). Pero, una vez que se acepta la demostración de que estos dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, muchos estudiantes creen que pueden concluir que esto depende del hecho de que ambos son conjuntos infinitos y que por lo tanto «todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad»: *infinita.* Por lo que, por ejemplo, N, Z, Q y R deberían simplemente de tener la misma cardinalidad.
Esta aceptación intuitiva (que representa una *misconcepción* bastante difundida) la llamaremos de ahora en adelante: ***aplastamiento*** de los cardinales transfinitos.

3.2. Ponemos en evidencia otra convicción estudiada muchas veces en las investigaciones; por ejemplo, en Tall (1980)[6] se muestra cómo los procesos mentales y las convicciones intuitivas llevan

[5] En realidad, existen otros detalles que hay que cuidar, así como precauciones que se deben tomar; pero, dado que nuestro objetivo aquí no es el de entrar en cuestiones finas sobre este argumento (por lo demás bien conocidas) si no exponer una de nuestras investigaciones, eludimos la cuestión. Se puede ver al respecto Carruccio (1964).
[6] Pero sobre este argumento la literatura es vasta en todo il panorama internacional. Véase D'Amore (1996).

a los estudiantes a pensar que en un segmento *largo* existan más puntos que en un segmento más *corto*.[7]
Esta aceptación intuitiva (que representa una *misconcepción* bastante difundida) la llamaremos de ahora en adelante: ***dependencia*** de los cardinales transfinitos de hechos relativos a medidas.

3.3. Las aceptaciones intuitivas *(misconcepciones)* de *aplastamiento* y de *dependencia* se hallan en contradicción entre ellas; pero parece que los estudiantes no se sienten interesados por volver coherentes sus creencias, como muestran, en modos y ámbitos diferentes, Stavy y Berkovitz (1980), Hart (1981), Schoenfeld (1985), Tirosh (1990), Tsamir y Tirosh (1997) y D'Amore y Martini (1997, 1999).

3.4. Duval (1983) analiza la dificultad que tienen los estudiantes para aceptar la correspondencia biunívoca llamada "de Galileo" entre N y el (su) subconjunto de los números cuadrados. Él la explica (incluso) gracias a un obstáculo que llama de ***deslizamiento***: en su caso se trata del deslizamiento del verbo *Tener* al verbo *Ser* en el curso de la demostración (es decir: en el curso de la demostración, se pasa de propiedades de ciertos números recurriendo al verbo *Tener,* a la descripción de una peculiaridad de estos mismos números expresada mediante el verbo *Se*r). Pero nosotros podemos tomar esto como prototipo y hablar de *deslizamiento* más en general; en el curso de una demostración: nuestra acepción de *deslizamiento* (un poco más amplia que la de Duval) se tiene cuando se está hablando de alguna cosa (o en un cierto modo, o en el ámbito de un cierto lenguaje) y, de improviso, nos hallamos hablando de otra cosa (o en otro modo o en otro lenguaje). Es evidente que este pasaje del contexto geométrico al aritmético y viceversa se inserta en el "*jeu de cadres*" de Douady (1984-86). Característica de nuestro caso específico es el doble pasaje y el hecho de que es relativo a una demostración. Se debe también hacer referencia a la dificultad de parte de los estudiantes en el pasaje entre diversos sistemas de representación Duval (1995).

3.5. El clásico debate filosófico de origen aristotélico sobre el infinito en sentido *actual* y en sentido *potencial* (Arrigo, D'Amore, 1993; Arrigo, D'Amore, Sbaragli, 2011) ha inspirado diferentes investigaciones, por ejemplo las de Moreno y Waldegg (1991), de Tsamir y Tirosh (1992), de Shama y Movshovitz Badar (1994) y de Bagni (1998). Se han hallado, en verdad, resultados a veces contradictorios; pero está probado que la evolución de la concepción *actual* del infinito matemático es más lenta y se da en modo contradictorio a lo largo del curso del currículo escolar y gracias a un proceso de maduración y sistematización cognitiva de los aprendizajes. Ahora, la demostración descrita por nosotros en el apartado 1 es claramente de tipo *actual* por el modo mismo en el que se manipulan algunos conjuntos infinitos (los puntos del cuadrado y del segmento, las cifras después del punto). Este hecho podría constituir uno de los puntos de dificultad para la aceptación de la demostración misma.
[Naturalmente tuvimos en cuenta los numerosos estudios sobre la demostración matemática en clase. Pero, en realidad, aquí no se trataba de "dar una demostración" sino de "seguir una demostración dada por otros" y después discutir el grado de aceptación para estudiar los motivos de un eventual rechazo: nos parece que la especificidad de la demostración y el hecho de que ella involucre al infinito cobran mayor relevancia con respecto a la actividad del demostrar en sí].

4. Resultados

La demostración del teorema de Cantor se revela por encima de las capacidades normales de aprendizaje de los estudiantes de las escuelas superiores que no han aún seguido un curso del Análisis. Esto se debe sobre todo a obstáculos de naturaleza epistemológica y didáctica, como hemos mostrado, y a dos pasajes en la demostración (deslizamiento y manipulación de las cifras). El éxito

[7] Esta creencia de carácter *monádico* (y por lo tanto de factura *pitagórica*), no obstante variados pero esporádicos antecedentes, fue definitivamente descubierta solo en el siglo XX, es decir, mas bien recientemente. Véase Arrigo y D'Amore (1993). Ella, como sea, forma parte de la mentalidad común, más allá del mundo matemático. Se halla incluso entre los profesores.

obtenido por el 19.2% cae en los valores normales del estrato de alto rendimiento de una población escolar y por lo tanto no parece significativo para nuestra investigación.

Las demostraciones de los otros dos teoremas ("segmentito-segmentote" y "formas periódicas") resultaron más accesibles, pero también pusieron en evidencia la existencia de obstáculos de diversa naturaleza, por ejemplo de tipo curricular y cognitivo general.

El examen de los cuestionarios nos lleva a intuir que los obstáculos se podrían superar en al menos dos modos:

mediante una especie de eludir (véanse las demostraciones de "segmentito-segmentote" y de "formas periódicas"); la operación puede lograrse también plenamente, pero no tiene efecto duradero: a la fase "lo veo", es decir a la comprensión técnica de la demostración, puede seguir una reacción del tipo "pero no lo creo" causada por el regreso en superficie de los obstáculos;

mediante remoción y superación de los mismos.

Para superar un obstáculo epistemológico se necesita hacer atravesar al estudiante la frontera de sus conocimientos, aumentándolos de manera directa y oportuna.

Por ejemplo, en el caso de "segmentito-segmentote" se necesita ayudar al estudiante a separarse del modelo del segmento como "collar" cuyas "perlas" se hallan estrechamente ordenadas. Se necesita hacerle tornar conciencia, por ejemplo, del hecho que, en un segmento, dado un punto, no tiene ya sentido pensar ni en el punto anterior ni en el sucesivo, buscando imágenes oportunas.

REFERENCIAS

Arrigo, G., and D'Amore, B. (1993). *Infiniti*. Milano: Angeli.

Arrigo, G., and D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática*, *11*, 1, 5-24.

Arrigo, G., and D'Amore, B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo…", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La Matematica e la sua didattica*, *1*, 4-57.

Arrigo, G., and D'Amore, B. (2004). Otros allazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, *16*, 2, 5-20.

Arrigo, G., D'Amore, B., and Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti*. Trento: Erickson. [En curso de traducción en idioma español: Bogotá: Magisterio].

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'ésprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bagni, G.T. (1998). L'infinitesimo nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'Analisi. *L'educazione matematica*, *3*, 2, 110-121.

Bourbaki, N. (1970). *Éléments de Mathématiques - Théorie des ensembles* - E III. Paris: Hermann.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistemologiques et les problèmes des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *4*, 2, 165-198.

Carruccio, E. (1964). *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought*. London: Faber and Faber.

Cavaillès, J. (1962). *Philosophie mathématique*. Paris: Hermann.

Courant, R., and Robbins, H. (1941). *What is mathematics*? New York: Oxford Univ. Press.

D'Amore, B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. *Epsilon*, *36*, 341-360.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Edición en español, 2006: *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio].

D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estévez, M., Fandiño Pinilla, M.I., Piatti, A., Rojas Garzón, P.J., Rodríguez Bejarano, J., Romero Cruz, J. H., and Sbaragli, S. (2004). Il "senso dell'infinito". *La matematica e la sua didattica 4*, 46-83. D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estévez, M., Fandiño Pinilla, M.I., Piatti, A., Rodríguez Bejarano, J., Rojas Garzón, P.J., Romero Cruz, J.H., and Sbaragli S. (2006). El "sentido del infinito". *Epsilon*, *22(2)*, 65, 187-216.

D'Amore, B., and Fandiño Pinilla, M.I. (2001). La "matemática de la cotidianidad". *Paradigma*, *1*, 59-72.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., and Sarrazy, B. (2011). *Didattica della matematica, Alcuni effetti del contratto*. Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri. [En curso de traducción en idioma español: Bogotà: Magisterio].

D'Amore, B., and Martini, B. (1997). Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. *Números*, *32*, 26-32.
D'Amore, B., and Martini, B. (1999). El "contesto natural". Influencia de la lengua natural en las respuestas a test de matemática. *Suma*, *30*, 77-87.
D'Amore, B., and Sandri, P. (1996). "Fa' finta di essere...". Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *19A*, 3, 223-246.
Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-object dans l'enseignement des mathématiques. Thèse d'État, Univ. De Paris. (1986) *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*, 2, 5-31.
Duval, R. (1983). L'obstacle de dedoublement des objects mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 385-414.
Duval, R. (1995). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Actes de l'École d'été* 1995.
Fischbein, E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. En Chini Artusi L. (ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132.
Fischbein, E., Jehiam, R., and Cohen, D. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceedings of the* XV1I1 PME. 2. Lisboa. 352-359.
Fischbein, E., Jehiam, R., and Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers en high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *29*. 29-44.
Hart K. (ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics*. London: Murray.
Moreno, L., and Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 211-231.
Noether, Y., and Cavaillès, J. (eds.) (1937). *Briefwechsed Cantor-Dedekind*.
Sbaragli, S. (2006). Primary School Teachers' beliefs and change of beliefs on Mathematical Infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 5*, 2, 49-76.
Sbaragli, S. (2007). Le "proposte" degli insegnanti di scuola primaria concernenti l'infinito matematico. En Giacardi, L., Mosca, M., and Robutti, O. (eds.) (2007). *Conferenze e seminari 2006-2007.* 73-87.
Schoenfeld, A. H. (1985) *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
Shama, G., and Movshovitz Hadar, N. (1994). Is intinity a wholer number? *Proecedings of the* XVIII PME, 2, Lisboa. 265-272.
Stavy, R., and Berkovitz, B. (1980). Cognitive conflict as a basic for teaching qualitative aspecis of the concept of temperature. *Science Education*, *28*, 305-313.
Tall, D. (1980). The notion of intinity measuring number and its relevance in the intuition of infmity. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 271 -284.
Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on Learning Problems on Mathematics*, *12*, 111-129.
Tsamir, P. (2000). La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica*, *2*, 167-207.
Tsamir, P., and Tirosh, D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual inlinity. *Proceedings of the* XVI PME, Durham NH, 90-97.
Tsamir, P., and Tirosh, D. (1994). Comparing infinite sets: intuition and representation. *Proceedings of the* XVI PME, 2, Lisboa. 345-352.
Tsamir, P., and Tirosh, D. (1997). Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito. *La matematica e la sua didattica*, *2*.122-131.
Waldegg, G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de resistance à l'instruction. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *5*, 19-36.